

二维与三维问题的无界边界单元

杨 茂 葛修润

提 要

本文通过对二维与三维问题的无界边界元的分析,指出二维问题中原有边界元上插值函数的缺点和不合理性,提出一种新型的无界边界元插值形式,对无界单元上的发散积分作了一些讨论。

一、引 言

边界积分方法——边界元法,是利用加权余量或贝蒂(Betti)互等功定理的思想,建立与微分方程等价的边界积分方程。在数值解的过程中,只需对边界上的已知量及未知量离散,对固体力学中含体力或非线性问题,仅将内域的适当部分做分块,将体力(对某些简单形式的体力,可将其影响转化为边界上的积分)或非线性部分的影响叠加在边界已知值的影响上。但无论这种内部非线性或体力分布形式如何复杂,都将不会增加边界元法待求解的线性代数方程组中的方程个数。这就使这种方法比有限元法具有较多的优势:离散化及数据输入(这往往是需要人去完成的工作)简单易行;对边界较复杂而内域线度较大的问题,可以大大减少计算机内存,加快运算速度;域内位移及应力的计算精度往往较高;对无限大域(边界在有界范围内)及半无限大域中的问题,可以避免由于引入无界元而带来的误差。

边界元法作为一种数值方法,由于瑞左(Rizzo)^[1],斯维德罗(Swedlow)^[2],门德逊(Mendelson)^[3],马可吉(Mukherjee)^[4],彼(Bui)^[5],布莱比亚(Brebbia)和太勒斯(Telles)^[6]的工作而逐渐成为较成熟的、可供工程实际应用的方法。但由于这种方法要求有“基本解已知”作为先决条件,而对于许多工程实际问题,相应的基本解是很难求出的。事实上,到目前为止,人们大量采用的基本解是开尔文(Kelvin)解和半无限大域中的解。对复合半平面这种看上去并不复杂的问题,其基本解的形式就已经比较复杂了^[7]。半无限大域中的基本解比起无限大域来说,也繁长了很多(如参考文献[8],[9])。

岩体工程结构的边界几何形式往往是多种多样的。例如,地面形状非平直的地下浅埋洞室和边坡等等(见图1)。这类问题无论是采用无穷大空间还是半无穷大空间的基本解都难于在不引入无界边界单元的情形下得到解决。

对图1中的问题,以图1(b)所示问题为例来分析在不考虑无界边界元情况下的边界元法计算所引入的简化。

对于这种情形,在基于无限大空间中的基本解(开尔文解)计算时,取有限部分边界如图2(a)所示,这一简化模型事实上等价于图2(b)的情形。在图2中,边界 Γ^f 上的位移和表面力

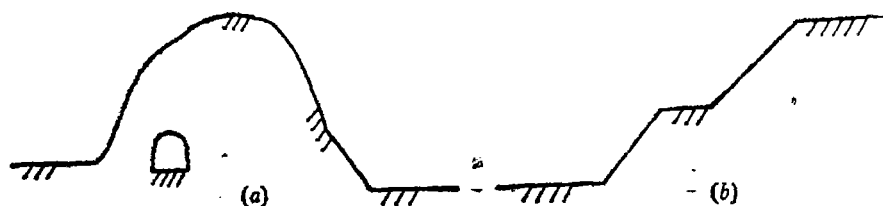


图 1 求解时需要采用无界边界单元的示例

Fig.1 Examples, for which solution adoption of infinite boundary elements is needed

诸分量都为零。由此可见,这种简化要求在处理上将两端点 A 、 B 取得足够远,否则端点的影响(人为地引入的裂纹尖端应力、应变奇性场)就很大,见后面的例题所示。

鉴此,一些研究工作者开始注意到引进无界边界单元的必要。例如,文献[10]首先提出无界元的设想,并给出相应于二维和三维问题的插值形式。吕康成^①对三维问题做了一个尝试。

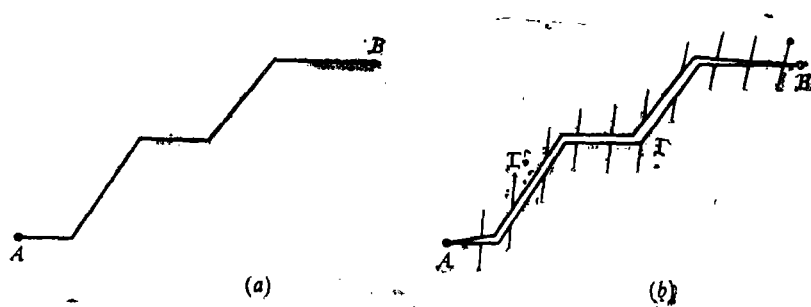


图 2 截断产生误差的起因

Fig.2 The error source consideration of limited boundary

本文旨在对现有的一些无界边界元模型做一个简要的评述,指出文献[10]中对二维问题所建议的插值形式的不合理性,同时提出一种新的插值形式,期望开拓边界元法的工程适用范围。

二、二维与三维无界边界元

以 $\bar{e}_i$ 表示二维或三维空间中沿第 i 个坐标轴方向的单位向量, $\bar{n} (= \bar{e}_i \cdot n_i)$ 为空间中任意一点 ξ 上某面元的单位外法向矢量,点 X 与点 ξ 的第 i 个坐标分量分别记为 $X_i(X)$ 和 $X_i(\xi)$ 。颁内吉(Banerjee)等人^[10]提出的无界元模型是基于开尔文解的。在无限大空间中充满着一种各向同性弹性介质,若在 X 点作用单位集中力 $\bar{e}_i$,引起 ξ 点处位移的第 j 个分量以及位于 ξ 点,外法向矢量为 $\bar{n}$ 的面元上的表面力的第 j 个分量为^[10]

三维情形下的位移分量

$$u_{ij}(\xi, X) = -\frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}] \quad (1)$$

①吕康成,三维应力分析的边界元法及其在工程中的应用,西安矿业学院硕士论文,1984年。

二维情形下(平面应变)的位移分量

$$u_{ij}(\xi, X) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu)\delta_{ij}\ln(r) - r_{,i}r_{,j}] \quad (2)$$

表面力分量

$$T_{ij}(\xi, X) = -\frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + \beta r_{,i}r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\} \quad (3)$$

其中 $\alpha=2, 1$; $\beta=3, 2$ 分别对应于三维和二维(平面应变)问题。

$$\left. \begin{aligned} r &= (r_i r_i)^{\frac{1}{2}} \\ r_i &= X_i(X) - X_i(\xi) \\ r_{,i} &= \frac{\partial r}{\partial X_i(X)} = \frac{r_i}{r} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

用边界积分表示的三维或二维平面应变(平面应力)问题的位移为

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) = \int_{\Gamma} U_{ij}(\xi, X)t_j(X)dS(X) - \int_{\Gamma} T_{ij}(\xi, X)u_j(X)dS(X) \quad (5)$$

其中 ξ 为域 Ω 内或其边界 S 上的点; $C_{ij}(\xi)$ 当 $\xi \in \Omega - S$ 时取值 δ_{ij} , 当 $\xi \in S$ 时为与该点邻近的边界几何形状相关的函数^[8]。

设 $S = S_1 \cup S_2$, 其中 S_1 为 S 的有界部分, S_2 为 S 的无界部分。式(5)可进一步写为

$$\begin{aligned} C_{ij}(\xi)u_j(\xi) &= \int_{S_1} U_{ij}(\xi, X)t_j(X)dS(X) - \int_{S_1} T_{ij}(\xi, X)u_j(X)dS(X) \\ &+ \int_{S_2} U_{ij}(\xi, X)t_j(X)dS(X) - \int_{S_2} T_{ij}(\xi, X)u_j(X)dS(X) \end{aligned} \quad (6)$$

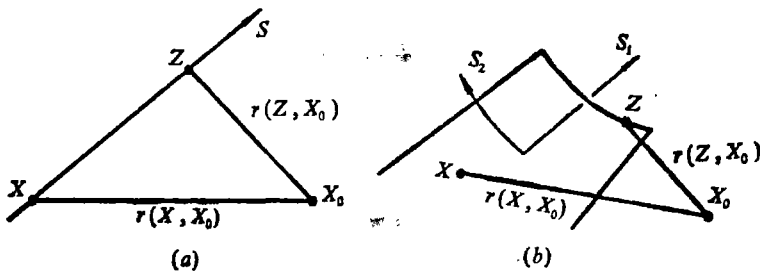


图 3 无界元上的插值函数

Fig.3 The interpolation functions for infinite boundary elements

图 3(a), (b) 分别示出二维(平面应变)和三维问题的无边界单元。 S, S_1, S_2 分别为相应的自然坐标; Z 为无界元上起始端上一点(对二维问题, 这一点是唯一的, 对三维问题, 可取在自然坐标 $S_1=1$ 边上的任意一点); X 为无界元上的动点(变化点, 也可称之为积分点); X_0 为任意取定的, 不在无界元上的点。颁内吉假定

对于二维问题

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i(Z) \frac{r(Z, X_0)}{r(X, X_0)} \\ t_i &= \bar{t}_i(Z) \left(\frac{r(Z, X_0)}{r(X, X_0)} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

对于三维问题

$$\left. \begin{aligned} u_i(S_1, S_2) &= u_i(1, S_2) \frac{r(Z, X_0)}{r(X, X_0)} \\ t_i(S_1, S_2) &= t_i(1, S_2) \left[\frac{r(Z, X_0)}{r(X, X_0)} \right]^2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中 $\bar{u}_i, \bar{t}_i$ 为 $S=0$ 端点的位移和面力分量; $u_i(1, S_2), t_i(1, S_2)$ 为 $S_1=1$ 边界上的位移和面力分量的分布函数。

下面我们分别将式(7)和(8)代入式(6)中的相应位置, 来分析其渐近满足对应方程的情况。

先考虑三维情形, 由式(1), (3), (6), 我们有

$$\begin{aligned} C_{ij}(\xi) u_j(\xi) &= \int_{S_l} U_{ij}(\xi, X) t_j(X) dS \\ &\quad - \int_{S_l} T_{ij}(\xi, X) u_j(X) dS(X) + O\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

这是因为, 当 r 充分大时, $U_{ij}(\xi, X) = O\left(\frac{1}{r}\right)$, $T_{ij}(\xi, X) = O\left(\frac{1}{r^2}\right)$, 由式(8)

$$\begin{aligned} U_{ij}(\xi, X) t_j(X) &= O\left(\frac{1}{r^3}\right) \\ T_{ij}(\xi, X) u_j(X) &= O\left(\frac{1}{r^3}\right) \end{aligned}$$

故

$$\left. \begin{aligned} \int_{S_l} U_{ij}(\xi, X) t_j(X) dS(X) &= O\left(\frac{1}{r}\right) \\ \int_{S_l} T_{ij}(\xi, X) u_j(X) dS(X) &= O\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

在 S_l 上, 通常 $t_j(X), u_j(X)$ 取为分片多项式插值, 积分 $\int_{S_l}$ 用分片高斯(Gauss)积分计算。当 ξ 充分远离参考点 X_0 时

$$\int_{S_l} U_{ij}(\xi, X) t_j(X) dS(X), \int_{S_l} T_{ij}(\xi, X) u_j(X) dS(X)$$

分别为形如

$$\frac{1}{r(\xi_g, \xi)}, \left(\frac{1}{r(\xi_g, \xi)} \right)^2$$

的函数的线性组合。其中 $r = r(\xi_g, \xi)$ 为高斯积分点 ξ_g 到“单位荷载点” ξ 的距离。从而

$$\left. \begin{aligned} \int_{S_l} U_{ij}(\xi, X) t_j(X) dS(X) &= O\left(\frac{1}{r}\right) \\ \int_{S_l} T_{ij}(\xi, X) u_j(X) dS(X) &= O\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

即由式(9)而得

$$u_j(\xi) = O\left(\frac{1}{r}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) + O\left(\frac{1}{r}\right) = O\left(\frac{1}{r}\right) \quad (12)$$

当 $\xi(\in S)$ 充分远离 X_0 点时, 可见式(8)给出的形函数是渐近合理的。

再考察二维情形, 由式(2), (3), (6)和(7), 我们有

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) = \int_{S_i} U_{ij}(\xi, X)t_j(X)dS(X) - \int_{S_i} T_{ij}(\xi, X)u_j(X)dS(X) + 0\left(\frac{1}{r}\right) \quad (9')$$

这是因为, 当 r 充分大时

$$U_{ij}(\xi, X) = 0(\ln r), \quad T_{ij}(\xi, X) = 0\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\text{由式(7), } U_{ij}(\xi, X)t_j(X) = 0\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad T_{ij}(\xi, X)u_j(X) = 0\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

[注: $(\ln r) \cdot \frac{1}{r^2} = 0\left(\frac{1}{r^2}\right)$, $\forall \lambda > 0$]故

$$\left. \begin{aligned} \int_{S_i} U_{ij}(\xi, X)t_j(X)dS(X) &= 0\left(\frac{1}{r}\right) \\ \int_{S_i} T_{ij}(\xi, X)u_j(X)dS(X) &= 0\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned} \right\} \quad (10')$$

在 S_i 上, $t_j(X), u_j(X)$ 取为分段多项式插值, 积分 $\int_{S_i}$ 用分段高斯积分处理, 当 $\xi \in S_\infty$ 充分远离参考点 X_0 时

$$\int_{S_i} U_{ij}(\xi, X)t_j(X)dS(X), \quad \int_{S_i} T_{ij}(\xi, X)u_j(X)dS(X)$$

分别为形如

$$\ln[r(\xi_g, \xi)], \quad r^{-1}(\xi_g, \xi)$$

的函数的线性组合, 从而

$$\left. \begin{aligned} \int_{S_i} U_{ij}(\xi, X)t_j(X)dS(X) &= 0(\ln r) \\ \int_{S_i} T_{ij}(\xi, X)u_j(X)dS(X) &= 0\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

最后由式(9)得

$$u_i(\xi) = 0(\ln r) + 0\left(\frac{1}{r}\right) + 0\left(\frac{1}{r}\right) = 0(\ln r) \quad (14)$$

可见, 当 r 充分大时, $u_i(\xi)$ 将变得不收敛到零, 从而推知, 式(7)给出的形函数将导致错误的计算结果。

三、二维边界元法的无界单元上的新型插值函数

上面在对二维无界边界元的考察过程中, 若先不对位移作插值, 将得到

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) = - \int_S T_{ij}(\xi, X)u_j(X)dS(X) + 0(\ln r) \quad (15)$$

容易看出, 对任意分段多项式插值以及任意形式的面力在无界元上的插值, 只要积分 $\int_S U_{ij}(\xi, X)t_j(X)dS(X)$ 收敛, 我们都将得到形如式(15)的渐近关系。事实上, 在许多问题中, $t_j(X)$ 在 S 上是已知为零的, 如图 4。

由 $T_{ij}(\xi, X)$ 的形式, 若取 S 上的 $u_j(X)$, 为使积分 $\int_S T_{ij}(\xi, X)u_j(X)dS(X)$ 按一



图4 一般问题的两个伸向无限远的边界——无界支

Fig.4 The two boundaries extending to infinity for general problems

般意义收敛 (对固定的 ξ) 的插值函数, 则根据广义积分收敛的条件, 必须 $u_j(X) = O\left(\frac{1}{r^\lambda}\right)$ ($\lambda > 0$), 当 r 充分大时成立。将此形式的插值函数代入式(15)得

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) = F(\xi) + O(\ln r) \quad (16)$$

其中 $F(\xi) = - \int_{S_\infty} T_{ij}(\xi, X)u_j(X)dS(X) = 0$, 当 $r \rightarrow \infty$ 。

从而

$$u_j(\xi) = O(\ln r) \quad (14')$$

我们由取 $u_j(X)$ 为在 S_∞ 上收敛到零的形式的插值函数推出 $u_i(X)$ 在 S_∞ 上必趋向于无限大的结论。这种矛盾说明, 使 $\int_{S_\infty} T_{ij}(\xi, X)u_j(X)dS(X)$ 收敛的 $u_j(X)$ 实际上都不是可能的解。

为使式(15)可解, 须将插值函数的选取空间拓广。我们建议采用如下形式的插值

$$u_i(X) = \frac{\ln[r(Z_1, X_0)] - \ln[r(X, X_0)]}{\ln[r(Z_1, X_0)] - \ln[r(Z_2, X_0)]} u_i(Z_2) + \frac{\ln[r(X, X_0)] - \ln[r(Z_2, X_0)]}{\ln[r(Z_1, X_0)] - \ln[r(Z_2, X_0)]} u_i(Z_1) \quad (17)$$

其中 Z_1, Z_2 为 S_∞ 上两个插值点, 以此代入式(15)右端积分号下, 得

$$\int_{S_\infty} T_{ij}(\xi, X)u_j(X)dS(X) = \int_0^{+\infty} \left[0\left(\frac{1}{r}\ln r\right) + 0\left(\frac{1}{r}\right) \right] dS \quad (18)$$

注意到 $0\left(\frac{1}{r}\ln r\right) = 0\left(\frac{1}{r}\right)$, $\int_0^{+\infty} 0\left(\frac{1}{r}\right)dS$ 为发散积分^[12], 其有限部分为 $\ln r$ 。从而, 积分式(18)的最后结果应当是

$$\int_{S_\infty} T_{ij}(\xi, X)u_j(X)dS(X) = A_i \ln r + B_i \quad (19)$$

其中 $A_i, B_i (i=1, 2)$ 是某些常数。代入式(15)

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) = 0(\ln r) + 0(\ln r) = 0(\ln r) \quad (20)$$

这正是我们所期望的渐近等式。

另一方面, 若将无穷远点看作一点, 且假设在该点处位移的分量为连续的, 注意到 S_∞ 通常有两个无穷支(图4中 S_∞^1, S_∞^2), 对 S_∞ 上的自然坐标作正则变换

$$\tau = \frac{S_1 - 1}{S_1 + 1}$$

$$\tau = \tau(S_1) = \begin{cases} -1 & S_1 = 0 \\ 0 & S_1 = 1 \\ +1 & S_1 = \infty \end{cases} \quad (21)$$

其中 $S_1 = S - M$, M 为一充分大的正数。我们仍记 $S_1 = 0$ 点为 S_∞ 的始点, 则

$$\begin{aligned} \int_{s_\infty} T_{ij}(\xi, X) u_j(X) dS(X) &= (S_\infty^1 + S_\infty^2) 0 \int_0^M + (S_\infty^1 + S_\infty^2) 0 \int_M^\infty T_{ij} u_j dS \\ &= (S_\infty^1 + S_\infty^2) 0 \int_0^M T_{ij}(\xi, X) u_j(X) dS \\ &\quad + (S_\infty^1) 0 \int_M^\infty T_{ij}(u_j' - u_j^2) dS_1 \end{aligned} \quad (22)$$

其中“()0”表示“0”后面的运算取在圆括弧中的边界上, u_j^1, u_j^2 分别为 u_j 在 S_∞^1 和 S_∞^2 上对应于同一个 S_1 的点上的位移分量。式(22)中最后一个积分为

$$\int_0^1 T_{ij}[u_j^1 - u_j^2] dS_1 = \int_0^1 0 \left[\frac{1}{r} \ln \frac{r^1(X, X_0)}{r^2(X, X_0)} \right] dS_1(X) = \int_{-1}^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^1 0 \left[\frac{1}{r} \ln \frac{r^1(X, X_0)}{r^2(X, X_0)} \right] \frac{d\tau}{(1-\tau)^2}$$

距离 $r^1(X, X_0) = a + S_1$, $r^2(X, X_0) = b + S_1$, 其中 a, b 为两个常数, 从而

$$\begin{aligned} r^1(X, X_0) &= \frac{(1-a)\tau + 1 + a}{1-\tau}, \quad r^2(X, X_0) = \frac{(1-b)\tau + 1 + b}{1-\tau} \\ 0 \left(\frac{1}{r} \ln \frac{r^1}{r^2} \right) \frac{1}{(1-\tau)^2} &= 0 \left\{ \frac{(a-b)\tau - (a-b)}{[(1-a)\tau + 1 + a][(1-b)\tau + 1 + b]} \right\} \end{aligned}$$

故积分 $\int_{1-\varepsilon}^1 0 \left[\frac{1}{r} \ln \frac{r^1(X, X_0)}{r^2(X, X_0)} \right] \frac{d\tau}{(1-\tau)^2}$ 当 ε 趋于零时可以任意小, 从而证实了积分

$\int_{s_\infty} T_{ij}(\xi, X) u_j(X) dS(X)$ 是有意义的, 其主值积分存在。

数值计算时, 可引用变换式(21), 在 $\tau \in [-1, +1]$ 上作常义积分 (如用高斯积分来近似)。

四、算 例

(一) 半平面上表面作用一段均匀分布力

如图 5 所示, $q = 2 \times 10^5 \text{ N/m}$, $A_i, B_i (i=1, \dots, 4)$ 诸点的坐标分别为

$$A_1(0, -2.5), A_2(0, -5.0), A_3(0, -7.5), A_4(0, -10.0);$$

$$B_1(10, -2.5), B_2(10, -5.0), B_3(10, -7.5), B_4(10, -10.0)。$$

假设这是属于平面应变问题, 进行边界元计算时, 最远结点取在 $(\pm 65.0, 0.0)$ 处, 分如下四种情形计算

1. u_1, u_2 在无界元上为收敛型 (Banerjee);
2. u_1 为收敛型, u_2 为发散型 $[0(\ln r)]$;
3. u_1 为发散型, u_2 为收敛型;

4. u_1, u_2 为发散型。

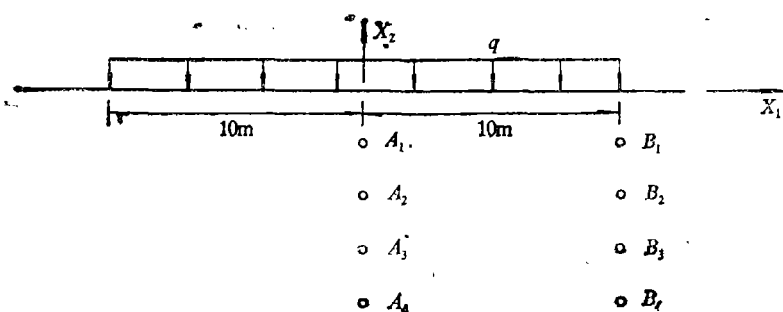


图 5 用无界元处理半平面作用均布力问题的题

Fig.5 Infinite boundary element treatment of a half-plane problem with uniform loading

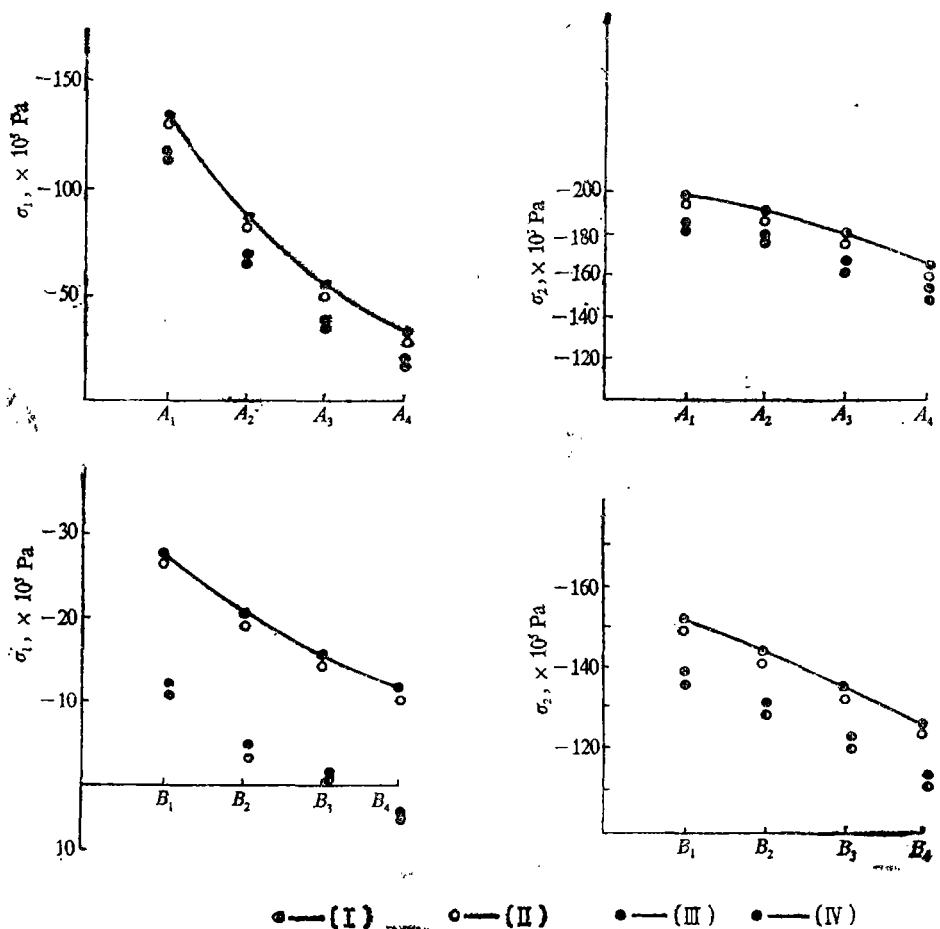


图 6 半平面表面有一段均布力

“—” 为解析解

Fig.6 Half-plane with uniform loading

“—” : analytical solutions

图 6 描出了各种算法与解析结果的比较。由图 6 可见,收敛(Banerjee)的处理方法导致的计算结果与解析结果相去甚远,有的甚至完全错误,如 $B_i(i=1,\cdots,4)$ 各点的第一主应力那样。

由于对本例所示问题, OX_1 方向的力(荷载)为零,故该方向的位移亦可能趋向于零。从而采用该方向的位移的收敛模型时,结果的精度很高。但另一方面,实算表明,若采用两个方向的发散模型,其计算结果仍是非常好的。据此,我们认为对任意无界边界的问题,无需分析其沿各个方向的外力主矢是否为零,可直接采用两个方向的位移发散模型处理。

(二)露天边坡岩体内有一个圆形疏干廊道的算例

露天边坡与廊道的几何尺寸如图 7 所示。衰减中心与坐标原点重合,廊道的圆 心 位于 $(45.0,-45.0)$ 处,基岩的容重为 50kN/m^3 。

采用无界边界元计算时,边界节点共 62 个,其中,圆形廊道上取 24 个节点;边坡上诸节点位置在该图中标以“·”记号; A_1 点到原点的距离为 68m; 无界元上起始点到原点 距离为 120m。

在采用普通单元处理无界边界问题的计算中,最远点至原点的距离为 1000m,但这里仅采用地表边界上较粗略的单元划分,仍取该边界上节点数为 11,单元长度由近至 远 分 别 为 4m, 4m, 4m, 5m, 5m, 6m, 10m, 95m, 300m, 500m。

图 8 为采用各种无界单元时的计算结果,这里只将边坡上的表面张(压)力列 出 来 作 比 较,因为这些量往往是工程中较为重要的量值。

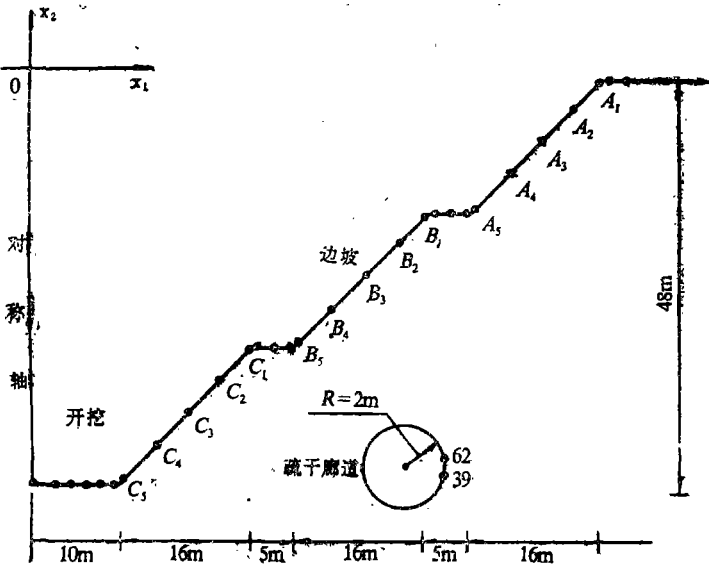


图 7 露天边坡的几何尺寸
Fig.7 Geometry of the slope

图 8 中诸记号的意义分别为
——: 采用普通边界元处理无界边界问题的计算结果;

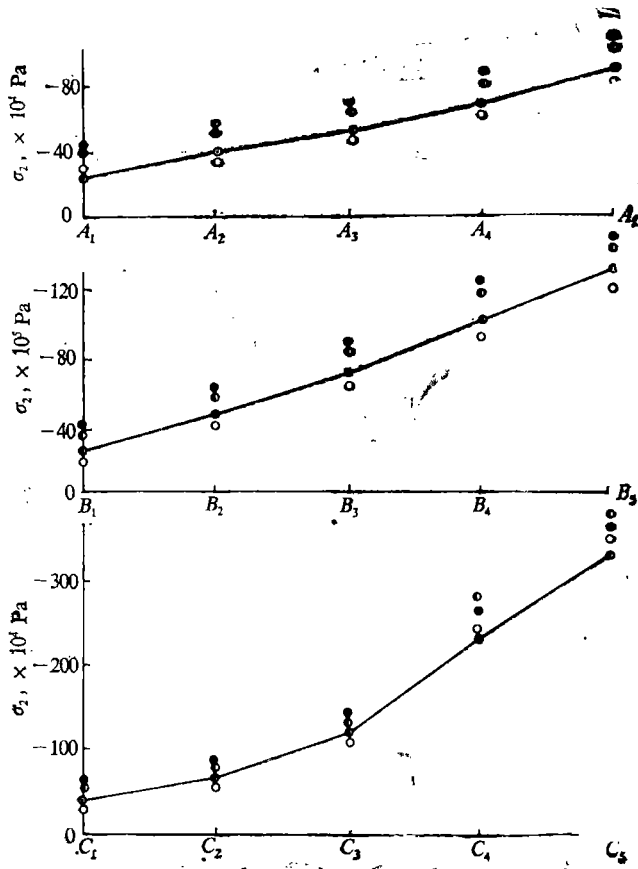


图 8 各种模型算出的表面切向压力 (第二主压力)

Fig.8 Surface tangential stress (σ_2) calculated with various models

- : u_1, u_2 在无界元上同取为收敛型(Banerjee)插值;
- : u_1 为收敛型, u_2 为发散型 $[0(\ln r)]$;
- ◐: u_1 为发散型, u_2 为收敛型;
- ⊖: u_1, u_2 在无界元上同时取为发散型。

由图显见, 数据“⊖”点完全落在曲线上, 即采用 u_1, u_2 的发散型插值时, 结果最理想。

五、结 语

由上面的论述可知:

1. 利用形如式(8)和(17)给出的插值函数, 可以分别对三维和二维问题无界边界元作出较合理的描述。
2. 对于二维情形, 取式(7)中给定的位移插值, 将无法正确描述一般问题中无界元上位移分布的情况。

3. 无界边界元上插值函数的引入, 将使边界元法的实用范围大大扩大。

另外, 尽管发散积分提出的时间已较长^[12], 但其在力学中的意义尚未完全揭示, 这一

点有待进一步研究。本文中涉及的发散积分, 舍去了其中的刚体位移部分。这部分位移量尽管无法估计, 但其产生的形变是可以忽略不计的(位移的导微函数, 即应变是趋近于零的)。

参 考 文 献

- [1] Rizzo, F.J., An Integral Equation Approach to Boundary Value Problem of Classical Elastostatics, Q.J. of Appl. Math. Vol. 25, No. 2, 1967.
- [2] Swedlow, J.L. and Cruse, T.A., Int. J. Solids Struct. No. 7, 1971.
- [3] Mendelson, A., Boundary Integral Methods in Elasticity and Plasticity, Rep. NO. NASA TN D-7418, 1973.
- [4] Mukherjee, S., Int. J. Solids Struct., Vol. 13, 1977, p. 331.
- [5] Bui, H.D., Int. J. Solids Struct., Vol. 14, 1978, p. 935.
- [6] Telles, J.C.F. and Brebbia, C.A., Appl. Math. Model, No. 3, 1979, p. 466.
- [7] 王泳嘉, 复合半平面的边界元法, 东北工学院学报, 第40期, 1984年。
- [8] Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C., Boundary Element Techniques, Springer Verlag, 1984.
- [9] Crouch, S.L., Int. J. Num. Methods in Engineering, No. 10, 1976, p. 301.
- [10] Banerjee, P.K., Butterfield, R., Developments in Boundary Element Method—1, 1978, p. 36.
- [11] 王敏中, 发散积分及其在弹性力学中的应用, 应用数学和力学, 第6卷第12期, 1985年。
- [12] Hadamard, J., Le Problème de Cauchy et Les Equations Aux, Derivées Partielles, 1932.

Infinite Boundary Element in Two and Three Dimensional Problems

Yang Wei Ge Xiurun

Abstract

In this paper, the infinite boundary elements developed previously in two and three dimensional problems are reviewed, and the shortcoming and irrationality of interpolation functions of those elements are pointed out. A new interpolation function of infinite boundary element is proposed. The divergent integration on infinite element is also discussed in this paper.